CERGY PARIS UNIVERSITÉ

Exercices de Mathématiques

UE : Séries

2025-2026

- Licence de mathématiques
- Licence d'informatique
- Double licence MI/MP
- CUPGE

Table des matières

Alexandre MIZRAHI

Semaine 1 : Compléments sur les suites

Exercice 1 **:** (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)
Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$l_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^3-3x^2+7x}{3x^3+6x}$

$l_2 = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^3-3x^2+7x}{3x^3+6x}$

$l_3 = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+7}$

$l_4 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+e^{2x}+e^{-x}}{x^4}$

$l_5 = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+e^{2x}+e^{-x}}{x^4}$

$l_6 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+e^{2x}-1}{x}$

$l_7 = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+e^{2x}-2e^{x}}{x^4}$

$l_8 = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(e^{3x}+2x)}{x}$

$l_9 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(e^{3x}+2x)}{x}$

$l_{10} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5x^2-3\ln(1+5x)}{x}$

$l_{11} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5x^2-3\ln(1+5x)}{2\sin(3x)}$

$l_{12} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x}}{x+1}$

$l_{13} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+\sin(7x)}{x\sqrt{x}+3x}$

$l_{14} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+\sin(7x)}{x\sqrt{x}+3x}$

$l_{15} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+\sin(7x)}{x\sqrt{x}+3x}$

$l_{16} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin(5x)}$

$l_{17} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}+2x^2+5}$

$l_{18} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}+2x^2}$

$l_{19} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+\ln(1+x)}{\sin x}$

$l_{20} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{e^x-x}-\cos(x)}{x^2}$

$l_{21} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^x}-1}{x}$

$l_{22} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)\sin(2x)}{x^2+x^3}$

$l_{23} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(2x)}$

$l_{24} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\ln(\frac{x+2}{x})}$

$l_{25} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2)}{(\sin(3x))^2}$

$l_{26} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+3\sin x)}{2x+3x^3}$

$l_{27} = \lim\limits_{x\to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x$

$l_{28} = \lim\limits_{x\to 0} x^x$

$l_{29} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^2+1}{x-3} - \frac{4x^2+1}{2x+1}$

$l_{30} = \lim\limits_{x\to +\infty} xe^{\frac{1}{2x+1}} - \frac{3x^2+1}{3x+2}$

$l_{31} = \lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{1}{2}x+5e^{3x})\sin(e^{-3x})$

$l_{32} = \lim\limits_{x\to +\infty} (2^x+3x^7)^{\frac{1}{x+2}}$

$l_{33} = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{e^x+x}-\sqrt{e^x+x^2}$

$l_{34} = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{e^x+x}-\sqrt{e^{2x}+x^2}$

$l_{35} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^4}{1-x^5}$

Exercice 2 **:** (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)
Déterminer des développements limités d'ordre n_i en 0 des fonctions f_i définies par :

$f_1(x) = \cos x + \sin x \quad (n_1 = 3)$

$f_2(x) = e^{2x} \quad (n_2 = 2)$

$f_3(x) = \frac{1}{1-3x} \quad (n_3 = 2)$

$f_4(x) = \frac{e^x}{1-x} \quad (n_4 = 3)$

$f_5(x) = \cos\sqrt{x} \quad (n_5 = 2)$

$f_6(x) = e^{\sin x} \quad (n_6 = 3)$

Exercice 3 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{u_n+u_{n+1}}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
c) Montrer par l'absurde que la suite (u_n) ne converge pas.
d) La suite (u_n) possède–t-elle une limite ?

Exercice 4 : Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}, (1-u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$ et $u_n \in]0;1[$.

a) Étudier les extrema de la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(1-x)$.
b) En déduire que $(1-u_n)u_n \leqslant \frac{1}{4}$.
c) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
d) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 5 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$ et les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la proposition $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$.

a) Montrer $\mathcal{P}_0$.
b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$ est vrai.
c) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} k$ et $S_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2$

a) Montrer que $S_1 = \sum_{l=0}^{n}(n-l)$, en déduire la valeur de S_1.
b) Développer $(1+k)^3$.
c) Calculer de deux façons $\sum_{k=0}^{n}(1+k)^3 - k^3$, en déduire S_2.

Exercice 7 : Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles, égales à partir d'un certain rang, c'est à dire qu'il existe un entier K tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > K \Rightarrow u_n = v_n$$

Démontrer en revenant à la définition de limite que si la suite (u_n) converge vers un réel l, alors $\lim v_n = l$.

Semaine 2 : Comparaison des suites

Exercice 8 : Déterminer des équivalents simples des termes suivants :

$$u_n = n^2 - 5n\ln n + \frac{2}{\sqrt{n}} \quad\Big|\quad v_n = \frac{3\sqrt{n}+1}{1+n^3} \quad\Big|\quad w_n = e^{-n} + \frac{1}{\ln n}$$

$$x_n = \frac{\sqrt{n}+\cos n + 21}{(n+2)^3} \quad\Big|\quad y_n = \frac{n^n + n!}{2^n + e^n} \quad\Big|\quad z_n = \big(n^2+\ln n\big)\big(e^{-n}+\frac{2}{n}\big)(\sqrt{n}+\cos n)$$

Exercice 9 : Déterminer des équivalents simples des termes suivants :

$$u_n = \ln(n+1) - \ln n; \qquad v_n = \cos\frac{1}{n}; \qquad w_n = \sin\frac{1}{n}; \qquad x_n = 1 + e^{\frac{1}{n^2}} - 2\cos\frac{1}{n}$$

Exercice 10 : Déterminer un équivalent "plus simple" de : $u_n = \sin(n+\frac{1}{n}) - \sin n$

Exercice 11 : Soient a, b, c trois réels strictement positifs, déterminer un équivalent simple de la suite u définie par

$$u_n = \frac{2n}{n+a} - \frac{n}{n+b} - \frac{n}{n+c}$$

Exercice 12 : Déterminer a, b des réels tels que le terme u_n soit "le plus petit possible" pour n grand, avec

$$u_n = n - \frac{a}{\ln(\frac{n}{n+1})} - \frac{b}{e^{\frac{1}{n}}-1}$$

Exercice 13 : Soit u et v des suites réelles vérifiants :

$$u_n = 2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{et} \quad v_n = 1 - \frac{1}{n} - 2\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Déterminer des expressions les plus simples possibles, ayant la précision maximale des termes suivants :

$a_n = u_n + v_n$ | $b_n = u_n v_n$ | $c_n = n u_n$ | $d_n = u_{2n}$ | $e_n = u_{n^2}$ | $g_n = u_{n+n^2}$

Exercice 14 : Pour chacune des lignes suivantes peut-on déduire Q_i de P_i avec :

$(P_1) : u_n = o(n^2)$	$(Q_1) : u_n = O(n^2)$	$(P_2) : u_n = O(n^2)$	$(Q_2) : u_n = o(n^2)$
$(P_3) : u_n = n^2 + o(n^2)$	$(Q_3) : u_n = o(n^2)$	$(P_4) : u_n = n^3 + o(n^2)$	$(Q_4) : u_n = o(n^2)$
$(P_5) : u_n = o(n^2+n^3)$	$(Q_5) : u_n = o(n^2)$	$(P_6) : u_n = o(n^2+n^3)$	$(Q_6) : u_n = o(n^3)$
$(P_7) : u_n = n^2 o(n^2)$	$(Q_7) : u_n = o(n^4)$	$(P_8) : u_n = o(n^2) + O(n^3)$	$(Q_8) : u_n = o(n^2)$
$(P_9) : u_n = \frac{1}{n} o(n^2)$	$(Q_9) : u_n = o(n^2)$	$(P_{10}) : u_n = \frac{o(n)}{o(n^2)}$	$(Q_{10}) : u_n = o(n)$
$(P_{11}) : u_n = O(\frac{n^2}{1+n^2})$	$(Q_{11}) : u_n = O(n^2)$	$(P_{12}) : u_n = \frac{1}{n} + o(n^2)$	$(Q_{12}) : u_n = o(\frac{1}{n})$
$(P_{13}) : u_n = \frac{1+n+n^2}{2-n} o(n)$	$(Q_{13}) : u_n = O(n)$		

Exercice 15 : Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles équivalentes, montrer que si (v_n) est strictement positive à partir d'un certain rang il en est de même pour (u_n).

Exercice 16 : Soit $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = \sqrt{n} + (-1)^n$

a) Montrer que $u_n \sim v_n$.

b) Etudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 17 : (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)
Déterminer des équivalents simples des termes suivants :

$$a_n = n^2 - 5n^3 + \frac{2}{\sqrt{n}} \quad\Big|\quad c_n = \frac{1}{n} + 5n^2 + \frac{n^3}{\ln n} \quad\Big|\quad e_n = (-1)^n n + \sqrt{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n} + 5n^2 + n^3\ln n \quad\Big|\quad d_n = \frac{\sqrt{n}+3n-\cos n}{(n+5)^2} \quad\Big|\quad f_n = \frac{7e^n + n^n - 5\ln n}{(1+\frac{1}{n})^8}$$

Semaine 3 : Séries numériques, sommes partielles, télescopie

Exercice 18 : Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}; \quad S_2 = \sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^k}{k}; \quad S_3 = \sum_{k=2}^{3}\frac{1}{(k-1)^2}; \quad S_4 = \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}; \quad S_5 = \sum_{k=1}^{100} 2^k; \quad S_6 = \sum_{k=0}^{100} 2;$$

Exercice 19 : Calculer les sommes partielles des séries suivantes, étudier leur convergence et calculer leur somme lorsqu'elles convergent (Pour le c on pourra utiliser une décomposition de la forme $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1}$) :

$$a : \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{3^k}; \quad b : \sum_{k\geqslant 1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right); \quad c : \sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k(k+1)}; \quad d : \sum_{k\geqslant 1} \left(\sum_{t=k}^{2k} \frac{1}{2^t}\right); \quad e : \sum_{k\geqslant 1} \frac{\sqrt{k+1}-3\sqrt{k}}{3^{k+1}}$$

Exercice 20 : On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$.

a) Montrer que : $3S_n = S_n - \frac{n}{3^n} + \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{3^{t-1}}$.
b) En déduire S_n.
c) En déduire que la série $\sum \frac{k}{3^k}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 21 : Soit $\sum u_n$ une série convergente :

a) Montrer que la série de terme générale $(1+u_n)$ est divergente.
b) Soit $\sum v_n$ une série divergente, montrer que la série de terme général $u_n + v_n$ est divergente.
c) Donner un exemple de deux séries divergentes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que la série de terme général $u_n + v_n$, soit convergente.

Exercice 22 : Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Justifier que f est bornée.
b) Déterminer les sommes partielles de la série de terme générale $(-1)^n \int_0^1 t^n f(t)\, \mathrm{d}t$.
c) Montrer que la série converge et que sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 t^n f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\, \mathrm{d}t$$

Semaine 4 : Convergence des séries à termes positifs

Exercice 23 : Étudier la convergence des séries suivantes :

$a) \sum \frac{n}{n^3+3n}$
$b) \sum \frac{n^7-6n^2-21}{n^8+31n}$
$c) \sum \frac{n^7}{2n-3n^9}$
$d) \sum \frac{n}{n^2+\cos n}$
$e) \sum \sin\frac{1}{n^2}$
$f) \sum \sin n$
$g) \sum \frac{\ln n}{n^3}$
$h) \sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+3n}$
$i) \sum \frac{1}{(2n+3)(n+7)}$
$j) \sum \frac{3+(-1)^n}{n}$
$k) \sum \cos\frac{1}{n^2}$
$l) \sum \frac{1+n^2}{n^3(n+\ln n)}$
$m) \sum \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln n}$
$n) \sum \frac{n^2-7n+3}{n^5-6n^2-1}$
$o) \sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
$p) \sum \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
$q) \sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
$r) \sum \frac{n^2+n\cos n}{n+192}$

Exercice 24 : (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)
Étudier la convergence des séries suivantes :

a) $\sum \frac{n^5-6n^2-21}{n^8+31n}$
b) $\sum \frac{1}{n^3+n\cos n}$
c) $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
d) $\sum e^{\frac{1}{n}}$
e) $\sum \frac{2+3\sqrt{n}}{n+3n^2}$
f) $\sum \frac{n^3+n^2+2}{5+n^2}$
g) $\sum \ln\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$
h) $\sum \frac{n+5(-1)^n}{n^3}$
i) $\sum \frac{7+3(-1)^n}{\sqrt{n}}$
j) $\sum \frac{n^3+3n\sin n}{n^4+192}$

Exercice 25 : En utilisant des développements limités, étudier la convergence des séries suivantes :

$a) \sum e^{\frac{1}{n}} - \frac{1+n}{n} \qquad b) \sum \cos\frac{1}{n} - n\sin\frac{1}{n} \qquad c) \sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 2\sqrt{\frac{1}{n}}$

Exercice 26 : Représenter dans le plan, l'ensemble des $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$, pour lesquels la série suivante converge :

$$\sum \frac{n^\alpha}{1+n^\beta}$$

Exercice 27 : Soit (a_n) une suite réelle, positive, on pose $b_n = \frac{a_n}{1+a_n}$.

a) Montrer que si la série $\sum a_n$ converge alors la série $\sum b_n$ converge.
b) Réciproquement, montrer que si la série $\sum b_n$ converge alors la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 28 : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente, étudier la convergence des séries :

$$\sum u_n^2; \quad \sum \ln(1+u_n); \quad \sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}; \quad \text{on pourra montrer que } \forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

Exercice 29 : Soient (u_n) une suite réelle décroissante de limite 0, et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
a) Montrer que $S_{2n} - S_n \geq n u_{2n}$.
b) Montrer que si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (nu_n) tend vers 0.
c) Soient $v_n = n(u_n - u_{n+1})$, et $T_n = \sum_{k=1}^n v_k$, Trouver une relation entre S_n et T_n, en déduire que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature et que lorsqu'elles convergent leurs sommes sont égales.
d) Déduire de la question précédente la somme de la série $\sum \frac{n}{2^{n+1}}$.

Exercice 30 : **[dur]** Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels positifs, telles que $a_n \sim b_n$ au voisinage de $+\infty$. On note

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k,\ \Sigma_n = \sum_{k=0}^n b_k,\ R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,\ \Gamma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$$

a) Calculer $S_n,\ \Sigma_n,\ R_n,\ \Gamma_n$ pour $a_n = 2^{-n}$ et $b_n = 2^{-n} + 3^{-n}$, comparer S_n et Σ_n puis R_n et Γ_n
b) Montrer que si $\sum a_n$ converge alors $R_n \sim \Gamma_n$ au voisinage de $+\infty$.
c) Montrer que si $\sum a_n$ diverge alors $S_n \sim \Sigma_n$ au voisinage de $+\infty$.
d) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n(1-u_n^2)$, montrer que (u_n) tend vers 0, déterminer α tel que la suite $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ ait une limite finie non nulle. A l'aide d'un télescopage déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 31 : **[dur]** Soit $\alpha > 1$, on veut déterminer la vitesse de convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

a) Tracer la fonction définie par $f(t) = t^{-\alpha}$ sur l'intervalle $[n; n+1]$, déterminer un encadrement de l'aire de la surface $S = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | n < x < n+1; 0 < y < f(x)\}$, à l'aide de l'aire de deux rectangles.
b) En déduire que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_N^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

c) En déduire un encadrement de $\sum_{n=N}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$.
d) En déduire l'équivalent suivant :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{N^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$

La convergence est-elle lente, géométrique, rapide ?

e) Accélération de convergence de la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$. On pose $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$; $R_N = \sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{n^2}$ et $S = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.
   i) Déterminer un équivalent de R_N.
   Montrer que la suite définie par $u_n = S_n + \frac{1}{n}$ converge vers S plus vite que (S_n) cad $u_n - S = \mathbf{o}(S_n - S)$.
   ii) Calculer $T = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.
   En étudiant la série de terme général $\frac{1}{n^2} - (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$, déterminer une série qui converge vers S plus vite que (S_n).
   iii) On suppose que $S_n = S + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + O(\frac{1}{n^3})$, on ne connaît ni S, ni a, ni b. On pose $D_n = 2S_{2n} - S_n$, montrer que (D_n) converge plus vite que S_{2n}, comparer le nombre de calculs élémentaires nécessaire pour calculer D_n et S_{2n}, conclusion.
   Comment pourrait-on sur la même idée construire une suite (U_n) qui converge plus vite que (T_{2n}).

Exercice 32 :
On considère les suites suivantes définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$, $\quad v_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right)$ et $w_n = u_n + v_n$

a) Quelle est la nature des séries de termes généraux $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$w_n = \ln\left(\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n \times \frac{(n+1)}{(n+2)}\right)$$
En déduire de $w_n = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) - \ln\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)$.
c) Montrer que pour tout $N \geq 1$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} w_n = \ln(2) - (N+1)\ln\left(1 + \frac{1}{N+1}\right)$
d) En déduire que la série de terme général $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$.

Semaine 5 : Comparaison à une série géométrique

Exercice 33 : Étudier la convergence des séries suivantes :

$a) \sum \frac{n}{2^n}$ $\qquad b) \sum \frac{n^4 - n^3}{2^n + 3^n}$ $\qquad c) \sum \frac{2^n - n}{3^n}$ $\qquad d) \sum \frac{1+n^2}{(3^n - 2)(1+n)}$

Exercice 34 : Étudier la convergence des séries suivantes :

$a) \sum \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ $\qquad e) \sum \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$ $\qquad i) \sum \left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$ $\qquad m) \sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$
$b) \sum \frac{n^3 - n^2 + 2}{(1+n^2)2^n}$ $\qquad f) \sum \frac{n^2+1}{2^n + n}$ $\qquad j) \sum \frac{n!}{n^n}$ $\qquad n) \sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$
$c) \sum \frac{2^n}{n!}$ $\qquad g) \sum \frac{n^7 e^n}{n!}$ $\qquad k) \sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ $\qquad o) \sum e^{an^2}\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^3}$
$d) \sum \frac{n!}{n^7 2^n}$ $\qquad h) \sum \left(1 - \cos\frac{1}{2^n}\right)$ $\qquad l) \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Exercice 35 : Soient $u_n = \dfrac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ $(n \geq 1)$ et $v_n = \ln u_n$.
1) Étudier la série de terme général ω_n où $\omega_n = v_n - v_{n-1}$ pour $n \geq 2$ et $\omega_1 = v_1$.
2) En déduire que la suite (v_n) converge et puis la suite (u_n) converge vers $\lambda > 0$.
3) En utilisant la formule de Walis :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi},$$
déterminer λ, et en déduire un équivalent de $n!$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 36 : [dur] Soit (u_n) et (v_n)deux suites convergentes vers un même réel l, on dit que (u_n) converge plus vite que (v_n) si $u_n - l = \mathbf{o}(u_n - l)$. Soit (a_n) une suite positive telle que $(\sqrt[n]{a_n})$ converge vers $l < 1$. Montrer que la série de terme générale a_n converge plus vite que toute suite géométrique de raison strictement supérieur à l.

Exercice 37 : [dur] Soit (a_n) une suite positive telle que $\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}}\right)$ converge vers $l < 1$.

a) Montrer que la série de terme générale $a_{n+1} - a_n$ converge plus vite que toute suite géométrique de raison strictement supérieur à l.
b) En déduire que la suite (a_n) converge plus vite vers 0 que toute suite géométrique de raison strictement supérieur à l.
c) En déduire que la série $\sum a_n$ converge plus vite que toute suite géométrique de raison strictement supérieur à l.

Exercice 38 : (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)
Comparer les vitesses de convergence des séries : $\sum \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{3^n}$.

Semaine 6 : Convergence absolue et compléments

Exercice 39 : Soient $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
b) Déterminer un équivalent simple de $v_{2n} + v_{2n+1}$.
c) En déduire que la série $\sum v_n$ diverge.
d) Montrer que $u_n \sim v_n$.
e) Ceci montre qu'une hypothèse est indispensable dans la proposition sur les séries ayant des termes généraux équivalents, laquelle ?

Exercice 40 : Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad d_n = \frac{(-1)^n}{n^4+2n^3-35\pi n+1} \qquad f_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{n^{\frac{1}{4}} - (-1)^n n^{\frac{1}{8}}}$$

$$b_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \qquad e_n = \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}} \qquad g_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$$

$$c_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \qquad h_n = \frac{(-1)^n}{2^n - 3^n}$$

Exercice 41 : Soit a un réel et $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$.
a) Si $a \leq 0$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
b) Si $a > 0$, écrire un développement asymptotique de u_n et déterminer les a pour lesquels la série $\sum u_n$ est convergente.

Semaine 7 : Compléments et produit de Cauchy

Exercice 42 : (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)
Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

$$a_n = \frac{1}{n(n^2+7)}; \quad b_n = \frac{3-7n}{n^2}; \quad c_n = \frac{n}{2^n}; \quad d_n = \frac{n^3}{n!}; \quad e_n = \frac{(-1)^n n+5}{n^2}; \quad g_n = \frac{5(-1)^n}{n^5-4n^3+1}$$

$$h_n = \frac{\sin n}{n(7+\sqrt{n})}; \quad i_n = \frac{n^2+3n^2\sqrt{n}-126n}{n^3+4n^2\sqrt{n}}; \quad j_n = \sqrt{\frac{n}{n+2}} - e^{\frac{-1}{n}}; \quad k_n = \frac{n^n}{n!}; \quad l_n = \frac{(-1)^n n^{\frac{1}{3}}+5}{n^{\frac{1}{2}}};$$

Exercice 43 : Soit a un réel strictement compris entre -1 et 1, montrer à l'aide du produit de Cauchy que

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-a} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n$$

Exercice 44 : Pour des réels a et b, montrer que la série de terme général $\frac{a^n}{n!}$ converge puis que

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$$

Exercice 45 : Série de Bertrand : Soient α et β deux réels, on cherche à étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$

On pose $\alpha' = \frac{1}{2}(1+\alpha)$ et $v_n = \frac{1}{n^{\alpha'}}$.

a) Si $\alpha > 1$,montrer que $u_n = \mathbf{o}(v_n)$ en déduire que la série $\sum u_n$ converge.
b) Si $\alpha < 1$,montrer que $v_n = \mathbf{o}(u_n)$ en déduire que la série $\sum u_n$ diverge.
c) Si $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, montrer que $\frac{1}{n\ln n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ en déduire que la série $\sum u_n$ diverge.
d) Si $\alpha = 1$ et $\beta < 1$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
e) Si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$, montrer que $\frac{1}{n\ln^\beta n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x\ln^\beta x}\,\mathrm{d}x$ en déduire que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 46 : Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs, convergente

a) Étudier le minimum de la fonction $f(x) = x + \frac{1}{1+n^2x}$ sur $\mathbb{R}^+$.
b) En déduire que la série $\sum \frac{1}{1+n^2a_n}$ diverge.

Exercice 47 : (Critère de Raabe-Duhamel)

a) Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs, on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 1$ et une suite bornée (M_n) tel que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{M_n}{n^\beta}$$

On pose $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$, déterminer un équivalent de $|w_n|$, montrer que la série de terme général w_n converge, en déduire qu'il existe un réel λ tel que $u_n \sim \lambda n^{-\alpha}$.

b) Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

$$u_n = \sqrt{n!}\ \sin x\ \sin\frac{x}{\sqrt{2}} \ldots \sin\frac{x}{\sqrt{n}}\ (x \in \mathbb{R}); \quad v_n = \prod_{p=1}^{n}\left(2 - e^{\frac{1}{p}}\right).$$

Exercice 48 : **[dur]** (Avec l'aide d'une calculatrice)
Considérons la série de somme partielle $S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k^2+1}$, on pose $R_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ le reste et S la somme de la série.

1) Pour une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$, f montrer que

$$\int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\ \mathrm{d}t$$

2) En déduire un encadrement de R_n.
3) En déduire un $n \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| \leq 10^{-4}$.
4) Montrer qu'il existe a et b tels que

$$\frac{1}{n^2+1} = \frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)} + t_n,$$

avec $0 \leq t_n \leq n^{-4}$ pour $n \geq 3$.
5) Montrer que $0 \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} t_k \leq \frac{1}{3n^3}$.
6) Calculer

$$\sum_{k \geq n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

7) Montrer à l'aide des questions précédentes que le calcul de S_{15} permet le calcul d'une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 49 : Étudier la nature des séries de terme général :

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{n^2+x^2}\ \mathrm{d}x \qquad c_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^a} \qquad e_n \text{ tel que } e_{n+1} = \frac{\sin e_n}{n}$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} k} \qquad d_n \text{ tel que } d_{n+1} = \frac{\cos d_n}{n}$$

Semaine 8 : Suites et séries de fonctions

Exercice 50 : Étudier la convergence simple des suites de fonctions (f_n) sur l'ensemble I correspondant ($I = \mathbb{R}$ si pas précisé).

$$a_n(x) = \frac{x}{x^2+n} \qquad d_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}; \qquad g_n(x) = x^n;\ I = [0,1]$$

$$b_n(x) = \frac{n^3 x}{n^4+x^4} \qquad e_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right); \qquad h_n(x) = (\sin x)^n$$

$$c_n(x) = \frac{nx^3+\sqrt{n}x+2}{1+nx^2} \qquad f_n(x) = \frac{n^2(x^3-x)+3n+4}{n^2(x^2-x)+2nx++} \qquad i_n(x) = \frac{\sin(\frac{x^2}{n})}{1-e^{-\frac{x}{n}}};$$

Exercice 51 : Étudier la convergence simple et la convergence normale sur $\mathbb{R}$ des séries de fonctions de terme général :

$$a_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2+1}; \qquad c_n(x) = \frac{\cos(nx)}{1+n^2}; \qquad e_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^2};$$

$$b_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n^2}\right); \qquad d_n(x) = \frac{x}{1+n^2}; \qquad f_n(x) = \frac{e^{-n}}{1+x^2};$$

$g_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$; $h_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n+1}$; $i_n(x) = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^n$;

<u>Exercice 52</u> : Étudier la convergence simple et la convergence normale sur $\mathbb{R}$ puis sur un intervalle de la forme $[-R; R]$ de la série de fonctions :

$$\sum \frac{x}{x^2+n^2}$$

<u>Exercice 53</u> : Étudier la convergence simple, la convergence normale sur $\mathbb{R}$ puis sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ avec $a > 0$ des séries de fonctions :

$$\sum \frac{1}{1+n^2x^2} \quad \text{et} \quad \sum \frac{x}{1+n^2x^2}$$

<u>Exercice 54</u> : Étudier les convergences simple et normale des séries de fonctions définies par leur terme général sur I.

$a_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}, \ I = \mathbb{R}^+$

$b_n(x) = \dfrac{x}{n^2}, \ I = \mathbb{R}$

$c_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } x \geqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}, \ I = \mathbb{R}$

$d_n(x) = \dfrac{nx}{3n^4+x^4}, \ I = \mathbb{R}$

$e_n(x) = \begin{cases} n^2x \text{ si } x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}, \ I = \mathbb{R}^+$

$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} \text{ si } x \geqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}, \ I = \mathbb{R}$

<u>Exercice 55</u> : On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$ sur $\mathbb{R}$.

a) Étudier la convergence simple de la série de fonctions de terme général f_n. On note S la somme de cette série.
b) Montrer que S est impaire, continue sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer qu'il existe K tel que pour tout $x > 1$, on ait $S(x) \leqslant \dfrac{K}{x}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
d) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} S(x) = 0$.
e) On note S_n la somme partielle d'indice n de la série de terme général f_n et T_n la somme partielle d'indice n de la série harmonique, montrer que $|T_n - S_n(x)| \leqslant \dfrac{nx^2}{1+x^2}$
f) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} S(x)/x = +\infty$. Que peut-on en déduire pour le graphe de S ? La fonction S est-elle dérivable en 0 ?

Semaine 9 : Étude de fonctions définies comme somme d'une série de fonctions

<u>Exercice 56</u> : Soit la fonction f définie comme la somme de la série $\sum \dfrac{\cos(nx)}{1+n^3}$, étudier la continuité et la dérivabilité de f.

<u>Exercice 57</u> : On étudie la série de fonction $\sum ne^{-nx}$.

a) Sur quel domaine maximum D de $\mathbb{R}$ la série converge-t-elle simplement, on note alors S sa somme.
b) Étudier la convergence normale de la série sur des intervalles de la forme $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
c) En justifiant, avec précision, une intégration terme à terme, déterminer une primitive de S.
d) Calculer S sur $]0; +\infty[$.

<u>Exercice 58</u> : Pour $n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \ f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+xn^2)}$.

a) Étudier la convergence simple de la série de fonction $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$, on note S la somme de la série de fonctions.
b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$.
c) Étudier la convergence normale de la série $\sum f'_n$ sur $[0; +\infty[$, puis sur $]0; +\infty[$, puis sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.
d) Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
e) Pour n fixé, déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de : $x \mapsto \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x}$.
f) En revenant à la définition de la dérivée en 0, montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.

<u>Exercice 59</u> : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

a) Déterminer l'ensemble $I \subset \mathbb{R}$ le plus grand possible tel que la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I. On note S sa somme.
b) Étudier la convergence normale de cette série de fonctions.
c) Montrer que S est continue sur I.
d) Étudier la convergence uniforme de la série de fonction $\sum f'_n$ sur I puis sur tout intervalle de la forme $[a; +\infty[$, avec $a > 0$.
e) Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

f) Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.

Exercice 60 : Soit (a_n) une suite numérique décroissante positive. Soit $u_n(x) = a_n x^n(1-x)$.

a) Montrer que la suite des fonctions (u_n) converge simplement sur $[0,1]$.
b) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
c) Montrer que la série converge normalement sur $[0,1]$ ssi $\sum_{k\geq 1} a_k/k$ converge.

Exercice 61 : (Fonction ζ de Riemann) : On note, pour $x \in]1,+\infty[$, $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

a) Montrer que pour $k>1$ entier et $x \in]1,+\infty[$, on a $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$.
b) En encadrant les sommes partielles de la série, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.
c) Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.
d) Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[$, puis que ζ est convexe.
e) Donner l'aspect de la courbe représentative de ζ.
f) Pour $x \in]1,+\infty[$, $T(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$, montrer que $\forall x \in]1,+\infty[,\ T(x)+\zeta(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$,

Exercice 62 : Soit f une fonction continue sur $I=[0,1]$, et pour tout $n \neq 0$, $f_n(x) = f(2^{-n}x)$.

a) On suppose qu'il existe une constante M telle que, pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq Mx$. Montrer que la somme S de la série $\sum f_n$ est continue sur I.
b) Montrer que si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors l'hypothèse de la question précédente est vérifiée, et qu'en plus la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$.

Semaine 10 : Séries entières

Exercice 63 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$(a) \sum 2^n x^n$
$(b) \sum n^n x^n$
$(c) \sum n x^n$
$(d) \sum \ln n\, x^n$
$(e) \sum \frac{1}{n!} x^n$
$(f) \sum \frac{n^2-1}{n+1} x^n$
$(g) \sum n^5 x^n$
$(h) \sum 2^n x^{2n}$
$(i) \sum \cos n\, x^n$
$(j) \sum \frac{x^{2n}}{2-\sin(n)}$
$(k) \sum \frac{n^2+n}{2^n+n!} x^n$
$(l) \sum z^{n^2}$
$(m) \sum \frac{\ln(\sqrt{n}+1)}{\ln(\sqrt{n}-1)} x^n$
$(n) \sum \frac{(2n)!x^n}{(n!)n^n}$
$(o) \sum (1-\frac{1}{n})^{n^2} x^n$
$(p) \sum x^{n!}$

Exercice 64 : Calculer le rayon de convergence et déterminer la somme des séries entières suivantes :

$(a) \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$ $\quad (b) \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n} x^n$ $\quad (c) \displaystyle\sum_{n\geq 0} n x^n$ $\quad (d) \displaystyle\sum_{n\geq 0} n x^{2n}$

Exercice 65 : Calculer le rayon de convergence et déterminer la somme des séries entières suivantes :

$(a) \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\quad (b) \displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\quad (c) \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{2n+1}$

Exercice 66 : Calculer le rayon de convergence et déterminer la somme de la série entière suivante $\sum a_n x^n$ avec :

$$a_{2n} = 3^n \text{ et } a_{2n+1} = 2^n$$

Exercice 67 : Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et b un réel strictement positif.

a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum n^d a_n x^n$ $(d \in \mathbb{Z})$, est R.
b) Montrer que le rayon de convergence de de la série entière $\sum b^n a_n x^n$ est $\frac{R}{b}$.
c) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 x^n$ est R^2.
d) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^{2n}$ est $\sqrt{R}$.
e) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n x^n}{n!}$, est infini.

Exercice 68 : On considère les trois séries entières suivantes $\sum x^n$, $\sum x^n/n$ et $\sum x^n/n^2$, préciser le comportement de chaque série aux extrémités de son intervalle de convergence (c'est à dire en R et en $-R$, où R est le rayon de convergence de la série entière.)

Exercice 69 : Soient $d \in \mathbb{N}$ et $\sum a_n x^n$ une série entière, montrer que les séries entières

$$\sum a_n x^n \text{ et } \sum a_{n+d}\, x^n$$

ont même rayon de convergence.

Exercice 70 : (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)
Déterminer le rayon de convergence et trouver la somme des séries entières

$a) \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ $\quad c) \sum_{n\geq 0}(n+2)x^n$ $\quad e) \sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n^2}x^n$ $\quad g) \sum_{n\geq 0} \frac{(\ln n)\ x^n}{(n+1)(2n+1)}$

$b) \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n+2^n)}$ $\quad d) \sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{3^n}x^{2n}$ $\quad f) \sum_{n\geq 1} \frac{1+a^n}{n}x^{2n}\ (a \in \mathbb{R}^+)$ $\quad h) \sum_{n\geq 0} \frac{\sin(n\theta)}{n!}x^n\ \ (\theta \in \mathbb{R})$.

Exercice 71 : Soit $f(x)$ la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R, où
$a_n = \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n dt$

a) Déterminer les bornes de la fonction définie sur $[0;1]$ par $h(t) = \frac{t}{1+t^2}$.
b) Montrer que $R \geq 2$.
c) Étudier la convergence normale sur $[0;1]$ de la série de fonctions : $\sum \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n$.
d) Écrire la fonction f comme une intégrale.

Exercice 72 : (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)
Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$(a) \sum_n 2^n x^{3n}$ $\quad (b) \sum_n \frac{n^2}{3^n+n}x^n$ $\quad (c) \sum_n 5^n x^{2n+1}$ $\quad (d) \sum_n (2-\frac{1}{n})^n x^{2n}$ $\quad (e) \sum_n \frac{2n}{(n!)^2}x^n$.

Semaine 12 : Développement en séries entières

Exercice 73 : Déterminer des séries entières dont la somme est égale aux fonctions suivantes sur leur intervalle de convergence :

$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad f_3(x) = \ln(1+x)$ $\quad f_5(x) = \frac{x}{1+x^2}$ $\quad f_7(x) = \text{ch}\, x$

$f_2(x) = e^{2x}$ $\quad f_4(x) = \text{Arctan}x$ $\quad f_6(x) = \frac{x}{1+2x}$ $\quad f_8(x) = \frac{1}{1-x}e^x$

Exercice 74 : A l'aide d'une série entière, calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)2^n}$$

Exercice 75 : Montrer que $\forall x \in [0,1[,\ \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{tx+1}\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n+x}\ dt$. On pourra utiliser une série géométrique.

Exercice 76 :

a) Rappeler le développement en série entière de $\ln(1+x)$.
b) Soit $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ une solution sur $]-1;1[$ de l'équation différentielle

$$(E) : x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(x+1)$$

Montrer que $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n^2+3n+2)}$.
c) Montrer que la somme de la série entière $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n(n^2+3n+2)}x^n$ est bien solution de E sur $]-1;1[$.
d) Écrire cette somme à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 77 : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + xy = 0$ qui sont des sommes de séries entières au voisinage de 0.

Exercice 78 : On considère l'équation différentielle (E) : $xy'' - y' + 4x^3y = 0$.

a) Montrer que si la somme d'une série entière est solution de (E), son terme général vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}(n+2)(n+4)a_{n+4} = -4a_n$$

et que $a_1 = a_3 = 0$.

b) Montrer que les termes a_{2k+1} d'indice impaire sont tous nuls.

c) Montrer que la série entière trouvée a un rayon de convergence infini et qu'elle est bien solution de (E).

d) Écrire les solutions de (E) développable en séries entières à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 79 : Soit $f(x)$ la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R où (a_n) est la suite de Fibonacci, définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $a_n \leq 3^n$.

b) En déduire que $R > 0$.

c) Montrer que $\forall x \in]-R; R[;\ f(x) = 1 + xf(x) + x^2 f(x)$.

d) Calculer $f(x)$ pour $x \in]-R; R[$, en déduire a_n et R.

Exercice 80 : Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon strictement positif. Montrer que si S est une fonction paire alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$.
Déterminer les séries entières dont la somme S est une fonction paire, solution au voisinage de 0 de l'équation différentielle $y'' + xy' + 2y = 0$.

Exercice 81 : Pour chacune des fonctions f_i suivante, déterminer l'ensemble de définition de f_i, le développement en série entière en 0, le rayon de convergence de ce DSE, les x pour lesquels il y a égalité entre $f_i(x)$ et son DSE.

$$f_1(x) = x^3 e^x,\ f_2(x) = \frac{1}{1-x^2},\ f_3(x) = \ln(1+x),\ f_4(x) = \arctan x$$

Exercice 82 : On rappelle le théorème de Cauchy linéaire pour les équations différentielles du premier ordre : Soient a et b des fonctions continues d'un intervalle ouvert I dans $\mathbb{R}$, t_0 un élément de I et y_0 un réel, l'équation différentielle

$$y' = a(t)y + b(t)$$

possède une unique solution définie sur I qui vérifie $y(t_0) = y_0$.

a) Montrer que la fonction définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$, $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

b) Montrer que cette équation différentielle possède une unique solution développable en série entière vérifiant $S(0) = 1$. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

c) En déduire le développement en série entière de f.

Exercice 83 : Montrer que l'équation différentielle $xy'' + y' + y = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une solution et une seule développable en série entière en 0 et prenant la valeur 1 en 0. On précisera le rayon de la série entière trouvée.

Exercice 84 : Soit la fonction définie sur $J =]0,1[$ par

$$g(x) = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$$

a) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

b) Calculer $g'(x)$, puis déterminer une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par g sur J.

c) En admettant que g est développable en série entière déterminer son développement en série entière en 0.

Exercice 85 : Donner le développement en série entière en 0 des fonctions réelles suivantes (on précisera le rayon de convergence) :

$$a)\ x \mapsto \int_x^1 \frac{1-\cos t}{t} dt \qquad\qquad b) :\ x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Exercice 86 : (A chercher seul, non corrigé en TD, réponse à la fin)
Sois f la somme de la série entière $\sum a_n x^n$. On suppose que le rayon de cette série entière est infini. De plus $f'(0) = 0$ et f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$xy'' - y = x^2$$

a) Montrer que $a_1 = 0$.

b) Montrer que $a_0 = 0$.
c) Déterminer une relation de récurrence entre a_n et a_{n+1}, en précisant les n pour lesquels elle est valable.
d) Montrer que $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{6}$, et $\forall n \geq 3,\ a_n = \dfrac{2n}{(n!)^2}$.

Semaine 13 : Combinatoire

<u>Exercice 87</u> : Pour tout entier d, on cherche à déterminer le nombre de couples d'entier naturel (a, b) tels que $a + 2b = d$, on note $p(d)$ ce nombre.

a) Calculer $p(2)$ et $p(6)$.
b) Écrire les fonctions définies par $\frac{1}{1-t}$ et $\frac{1}{1-t^2}$ comme somme de série entières.
c) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}$.
d) Décomposer la fraction rationnelle $F(t) := \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}$ en éléments simples.
e) En déduire un développement en série entière de $F(t)$.
f) Déterminer une formule pour $p(d)$.
g) Expliquer sans faire les calculs explicitement, comment on pourrait déterminer le nombre de triplet d'entier naturel (a, b, c) tels que $a + 2b + 3c = d$

<u>Exercice 88</u> : Notons $[\![1; n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n, S_n l'ensemble des bijections de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; n]\!]$ et D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1; n]\!]$, c'est à dire les bijections de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; n]\!]$ sans points fixes $(\forall i \in [\![1; n]\!];\ f(i) \neq i)$.

a) Déterminer le cardinale de S_n, on note d_n le cardinal de D_n, et on pose $d_0 = 1$.
b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_k = n!$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.
c) Montrer que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\frac{1}{k!} d_k \leqslant 1$.
d) Soit la série entière de somme $f(x) = \displaystyle\sum_{k\geq 0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_k x^k$, montrer que son rayon de convergence R est supérieur à 1.
e) Montrer que $\forall x \in]-1; 1[,\ f(x)e^x = \frac{1}{1-x}$.
f) En déduire que $d_n = \sum_{0 \leq p \leq n} (-1)^p \frac{n!}{p!}$. Calculer d_5.

<u>Exercice 89</u> : On note C_n, le nombre de parenthésages possible d'un produit de n termes, il est connu sous le nom de $n-1$ème nombre de Catalan. On pose $C_0 = 0$, $C_1 = C_2 = 1$.

a) Montrer que $C_3 = 2$ et $C_4 = 5$.
b) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ C_n = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.
c) On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum C_k x^k$, on note S sa somme.
d) Montrer que $S(x)^2 - S(x) + x = 0$, sur l'intervalle de convergence. Pour x fixé dans l'intervalle de convergence, en résolvant l'équation précédente calculer $S(x)$.
e) On pose $f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$, montrer que f est DSE sur l'intervalle $]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, puis que son développement en série entière $\sum a_n x^n$, sur cet intervalle vérifie $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}$.
f) Montrer que $\forall n \geq 2,\ a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k}$.
g) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_n = \frac{1}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}$.

<u>Exercice 90</u> : [dur] On note a_n le nombre de $n-$uplet d'entiers $(k_1; k_2; \cdots; k_n)$ valant $0; 1$ ou 2 tels que $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = n$. On pose $a_0 = 1$.

a) Calculer $a_1; a_2$ et a_3.
b) Montrer que a_n est le coefficient de X^n dans le polynôme $P(X) = (1 + X + X^2)^n$.
c) Montrer que $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(e^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t$.
d) En déduire que $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1 + 2\cos t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1 + 2\cos t)^n\,\mathrm{d}t$.
e) Pour $|x| < \frac{1}{3}$, on pose :

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Montrer que $A(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{1 - x(1+2\cos t)}\,\mathrm{d}t$.

f) On rappelle que $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a}$; en posant $u = \tan\frac{t}{2}$, montrer que $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ puis que $\forall x \in [-\frac{1}{3};\frac{1}{3}],\ A(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-3x)(1+x)}}$.

g) En déduire que : $\displaystyle\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{1+3x}{(1-3x)(1+x)}$.

h) Montrer que $\forall x \in [-\frac{1}{3};\frac{1}{3}],\ (1-3x)(1+x)A'(x) = (1+3x)A(x)$.

i) Montrer que $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \displaystyle\frac{2n+1}{n+1}a_n + \frac{3n}{n+1}a_{n-1}$.

Exercices corrigés

Solution de l'exercice 1 : $l_1 = \frac{7}{6}$; $l_2 = \frac{2}{3}$; $l_3 = +\infty$; $l_4 = +\infty$; $l_5 = +\infty$; $l_6 = 2$; $l_7 = +\infty$; $l_8 = 3$; $l_9 = 5$; $l_{10} = -15$; $l_{11} = -\frac{5}{2}$; $l_{12} = 2$; $l_{13} = 0$; $l_{14} = 0$; $l_{15} = \frac{8}{3}$; $l_{16} = \frac{3}{5}$; $l_{17} = 0$; $l_{18} = 0$; $l_{19} = 4$; $l_{20} = +\infty$; $l_{21} = \frac{1}{2}$; $l_{22} = 6$; $l_{23} = \frac{1}{4}$; $l_{24} = \frac{1}{2}$; $l_{25} = \frac{1}{3}$; $l_{26} = \frac{3}{2}$; $l_{27} = e$; $l_{28} = 1$; $l_{29} = 7$; $l_{30} = \frac{7}{6}$; $l_{31} = 5$; $l_{32} = 2$; $l_{33} = 0$; $l_{34} = -\infty$; $l_{35} = \frac{4}{5}$;

Solution de l'exercice 2 : $f_1(x) = 1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon(x)$; $f_2(x) = 1+2x+2x^2+x^2\varepsilon(x)$; $f_3(x) = 1+3x+9x^2+x^2\varepsilon(x)$; $f_4(x) = 1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$; $f_5(x) = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{24}x^2+x^2\varepsilon(x)$; $f_6(x) = 1+x+\frac{1}{2}x^2+x^3\varepsilon(x)$;

Solution de l'exercice 17 : $a_n \sim -5n^3$; $b_n \sim n^3\ln n$; $c_n \sim \frac{n^3}{\ln n}$; $d_n \sim \frac{3}{n}$; $e_n \sim (-1)^n n$; $f_n \sim n^n$;

Solution de l'exercice 24 : $a) u_n \sim n^{-3}$; $\sum u_n$ converge ; $b) u_n \sim n^{-3}$; $\sum u_n$ converge ; $c) u_n \sim n^{-1}$; $\sum u_n$ diverge ; $d) u_n \sim 1$; $\sum u_n$ diverge ; $e) u_n \sim n^{-3/2}$; $\sum u_n$ converge ; $f) u_n \sim n^{-1}$; $\sum u_n$ diverge ; $g) u_n \sim -n^{-2}$; $\sum u_n$ converge ; $h) u_n \sim n^{-2}$; $\sum u_n$ converge ; $i) u_n \geqslant \frac{4}{\sqrt{n}}$; $\sum u_n$ diverge ; $j) u_n \geq \frac{n^3-3n}{n^4+192} \sim n^{-1}$; $\sum u_n$ diverge ;

Solution de l'exercice 38 : Attention à ne pas confondre la suite $(\displaystyle\frac{1}{2^n})$ et la série $\displaystyle\sum\frac{1}{2^n}$, pour étudier la vitesse de convergence de la série il faut commencer par calculer le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$, pour cela on peut commencer par regarder $\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{2^k}$ puis faire tendre N vers l'infini, or $\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{N+1}}\right)/\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ d'ou $R_n = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$. De même pour la série $\displaystyle\sum\frac{1}{3^n}$ le reste $T_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$. Finalement $\frac{T_n}{R_n} = \frac{2^n}{2}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Finalement la série $\sum\frac{1}{3^n}$ converge plus vite que la série $\sum\frac{1}{2^n}$.

Solution de l'exercice 42 : Le terme général a_n est positif, il est majoré par $\frac{1}{n^3}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente, donc $\sum a_n$ converge.
Le terme général b_n est négatif dès le rang 2, son opposé $-b_n$ est donc positif dès le rang 2, or $-b_n \sim \frac{7}{n}$ qui est positif et le terme général d'une série de Riemann divergente, donc la série $\sum -b_n$ diverge donc la série $\sum b_n$ diverge.
Une application du critère de D'Alembert montre la convergence des séries $\sum c_n$ et $\sum d_n$.
$e_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{5}{n^2}$ or $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée convergente et $\sum\frac{5}{n^2}$ est une somme de Riemann convergente.
$|g_n| \leqslant \frac{5}{|n^5-4n^3+1|} \sim \frac{5}{n^5}$, donc $\sum g_n$ converge.
$|h_n| \leqslant \frac{1}{|n^{(3/2)}|}$, donc $\sum|h_n|$ converge. Donc $\sum h_n$ converge. $i_n \sim \frac{3}{\sqrt{n}}$ donc la série est divergente. Pour la série $\sum j_n$ on peut utiliser les développements limités usuels en 0 de $\sqrt{1+x}$ et e^x, ce qui permet de montrer que $j_n = \mathbf{O}(\frac{1}{n^2})$ la série $\sum j_n$ est donc convergente. on voit facilement en écrivant le numérateur et le dénominateur que $k_n \geqslant 1$, la série $\sum k_n$ est divergente. $l_n = \frac{(-1)^n n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{5}{n^{\frac{1}{2}}}$ La première partie est le terme général d'une série altérnée convergente ($\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{6}}}$), alors que le second est le terme général d'une série divergente. La série $\sum l_n$ diverge.

Solution de l'exercice 70 : $R_a = 1$ $R_b = 2$ $R_c = 1$ $R_d = \sqrt{3}$ $R_e = \frac{1}{2}$ $R_f = \min(1, a^{-0,5})$ $R_g = 1$ $R_h = +\infty$

Solution de l'exercice 72 : La série du (a) est une série géométrique de raison $2x^3$ elle converge si et seulement si $|2x^3| < 1$ ce qui équivaut à $x \in]-2^{-1/3}; 2^{-1/3}[$, Donc $R = 2^{-1/3}$. On peut aussi utiliser D'Alembert ou Cauchy. Pour (b) Commençons par regarder un équivalent $\frac{n^2}{3^n+n}x^n \sim \frac{n^2}{3^n}x^n$ puis utilisons le critère de D'Alembert

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}x^{n+1}\frac{3^n}{n^2x^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{|x|}{3}$$

or cette suite tend vers $\frac{|x|}{3}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Pour $|x| < 3$ la série est donc convergente, pour $|x| > 3$ la série est divergente, le rayon de convergence est donc $R = 3$.

Pour (c) utilisons le critère de D'Alembert

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|5^{n+1}x^{2(n+1)+1}\frac{1}{5^n x^{2n+1}}\right| = 5|x|^2$$

or cette suite tend vers $5|x|^2$ lorsque n tend vers $+\infty$. Pour $|x| < \frac{1}{\sqrt{5}}$ la série est donc convergente, pour $|x| > \frac{1}{\sqrt{5}}$ la série est divergente, le rayon de convergence est donc $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On peut remarquer que la série de départ est une série géométrique un petit peu camouflée.

Pour (d) Utilisons cette fois le critère de Cauchy

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(2-\frac{1}{n}\right)^n x^{2n}\right|} = \left(2-\frac{1}{n}\right)|x|^2$$

or cette suite tend vers $2|x|^2$ lorsque n tend vers $+\infty$. Pour $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ la série est donc convergente, pour $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ la série est divergente, le rayon de convergence est donc $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour (e), $u_n = \dfrac{2n}{(n!)^2}x^n$. Regardons $\frac{u_{n+1}}{u_n}$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2(n+1)}{((n+1)!)^2}|x|^{n+1}\frac{(n!)^2}{|x|^n}2n = \frac{(n+1)}{n}\frac{|x|}{(n+1)^2}$$

Donc $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$, la série de terme général u_n converge toujours, donc le rayon de convergence est infini.

Solution de l'exercice 86 : 1. Une formule du cours nous dit que pour un rayon de convergence non nul, $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$. D'ou $a_1 = f'(0) = 0$. On peut aussi remarquer que $f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n 0^{n-1}$, tous les termes sont nuls sauf pour $n = 1$ d'ou $a_1 = 0$.
2. Dans l'équation différentielle qui est valable pour tout x de $\mathbb{R}$, si l'on prend $x = 0$ on obtient $0f''(0) - f(0) = 0$ d'ou $f(0) = 0$ d'ou $a_0 = 0$.
3. $xf''(x) - f(x) - x^2 = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x^2$
$xf''(x) - f(x) - x^2 = -a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)na_{n+1} - a_n)x^n - x^2$
Comme f est solution on a pour tout $n > 2$, $(n+1)na_{n+1} - a_n = 0$ pour $n = 2$, $(n+1)na_{n+1} - a_n = 1$, pour $n = 1$, $(n+1)na_{n+1} - a_n = 0$, et $a_0 = 0$.
4. Ce qui nous donne a_2 et a_3, puis une recurrence nous permet de trouver la formule générale de a_n.